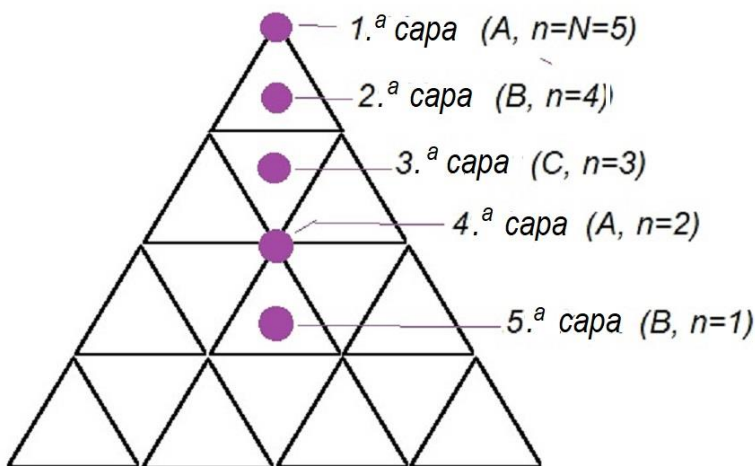


Solución del problema> Apilado compacto de pelotas de futbol

El apilado comienza con la base triangular de la pirámide conteniendo los centros de los balones en los nodos de un arreglo de triángulos equiláteros de lado igual al diámetro (D) de las esferas, embebidos en un triángulo equilátero mayor que constituye la base de la pirámide, como se muestra en la figura siguiente para $N = 5$ (primera capa, A). En la segunda capa (B) los balones se disponen en los nodos de una réplica de la capa A luego de eliminar los nodos de la base del triángulo y desplazar verticalmente el resto hacia abajo en $2/3$ de la altura de los triángulos elementales ($= D/\sqrt{3}$) y hacia arriba del plano horizontal en $\sqrt{2}/3D$. Mediante la repetición del procedimiento para construir las capas superiores, llegamos a una (la capa N -ésima) conteniendo un solo balón en el vértice de la pirámide.



Es interesante notar que los balones en la cuarta capa yacen sobre los de la primera (capa A). De esta manera, para una pirámide suficientemente grande, el apilado sigue la secuencia de capas ABC, ABC, etc. En cristalografía, esta secuencia de apilamiento compacto da lugar a la red cúbica centrada en las caras (ccc). Otra posibilidad de empaquetamiento compacto es un apilado donde la tercera capa yace sobre la primera, generando la secuencia AB, AB, etc., que corresponde a un arreglo igualmente compacto, llamado empaquetamiento compacto hexagonal (*ech*) que no se aplica a nuestro caso donde el objetivo es construir una pirámide tetraédrica, un arreglo contenido en una red cúbica *ccc*, pero no en una hexagonal *ech*.

Matemáticas para calcular el número total $S(N)$ de balones

Para un número N relativamente pequeño de balones, se puede realizar fácilmente un cálculo directo de $S(N)$. Por ejemplo, para $N = 5$ tenemos:

$$1.^{\text{a}} \text{ capa: } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$2.^{\text{a}} \text{ capa: } 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$3.^{\text{a}} \text{ capa: } 1 + 2 + 3 = 6$$

$$4.^{\text{a}} \text{ capa: } 1 + 2 = 3$$

$$5.^{\text{a}} \text{ capa: } 1$$

La suma del contenido de todas las capas da $S(5) = 35$ balones.

Para mayores valores de N , el cálculo es mucho más rápido recurriendo a una expresión general para $S(N)$. Seguidamente, derivaremos la ecuación correspondiente.

Podemos fácilmente apreciar que el número de balones en la n -ésima capa viene dada por la suma de una progresión aritmética $S_1(n) = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$, donde la suma de los números naturales extremos $1 + n$, $2 + (n-1)$, etc. resulta en el mismo valor e igual a $n + 1$. Así, para n par, $S_1(n) = (n+1)(n/2)$, y para n impar, $S_1(n) = (n+1)(n-1)/2 + (n+1)/2 = n(n+1)/2$, de nuevo, el mismo resultado,

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Para un apilamiento con cualquier número N de balones en la arista del tetraedro, $S(N)$ será igual a la suma del número de balones que integran todas las capas, esto es,

$$S(N) = S_1(1) + S_1(2) + \dots + S_1(N) = \sum_{n=1}^N S_1(n) = \sum_{n=1}^N \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N n + \sum_{n=1}^N n^2 \right) = \frac{1}{2} [S_1(N) + S_2(N)], \quad (2)$$

donde $S_1(N)$ es la suma de la progresión aritmética para $n = N$ dada por la ecuación (1),

$$S_1(N) = \frac{N(N+1)}{2}, \quad (3)$$

y $S_2(N)$ es la suma de los cuadrados de los números naturales, $S_2(N) = 1^2 + 2^2 + \dots + N^2$ cuyo valor puede derivarse mediante el siguiente procedimiento. Consideremos la identidad: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a = N$ y $b = N - 1$, $a = N - 1$ y $b = N - 2$, ... $a = 2$ y $b = 1$, y $a = 1$ y $b = 0$,

$$N^3 - (N-1)^3 = (N - N + 1) [N^2 + N(N-1) + (N-1)^2] = 3N^2 - 3N + 1$$

$$(N-1)^3 - (N-2)^3 = 3(N-1)^2 - 3(N-1) + 1$$

$$(N-2)^3 - (N-3)^3 = 3(N-2)^2 - 3(N-2) + 1$$

□

□

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1,$$

Sumando los miembros de la izquierda de dichas igualdades, donde todos los términos, excepto N^3 , se cancelan entre sí, e igualándolo a la suma de los términos de la derecha, igual a

$3 \left[\sum_{n=1}^N n - \sum_{n=1}^N n^2 \right] + N$, obtenemos la identidad $N^3 = 3[S_2(N) - S_1(N)] + N$, que nos conduce a

$S_2(N) = [N^3 + 3S_1(N) - N]/3$ que, a su vez, luego de reemplazar $S_1(N)$ por la ecuación (3), adopta la forma

$$S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \quad (4)$$

Sumando las contribuciones de las ecuaciones (3) y (4) a la ecuación. (2), obtenemos finalmente

$$S(N) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}. \quad (5)$$

Ahora podemos verificar fácilmente que para $N = 5$, la ecuación (5) resulta en $S(5) = (5 \times 6 \times 7)/6 = 35$ balones. Para el caso original, donde $N = 7$, obtenemos $S(7) = (7 \times 8 \times 9)/6 = 84$ balones.

Es interesante el notar que para el menos compacto apilado de pelotas de futbol definiendo una pirámide de base cuadrada, el número de balones en la n -ésima capa cuadrada es simplemente igual a n^2 y, por lo tanto, para una pirámide de base cuadrada con una arista comprendiendo N balones, el número total $S_c(N)$ de los mismos viene dado por

$$S_c(N) = \sum_{n=1}^N n^2 = S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \quad (6)$$

que para $N = 7$ resulta en $S_c(7) = (7 \times 8 \times 15)/6 = 140$ balones.